تحليل عددي ٢ م 7 نظري

الطرائق العددية لحل جملة المعادلات الخطية:

بفرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية التالية:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} &= b_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

هذه الجملة مكونة من n معادلة بـ n مجهول نرمز لهذه المجموعة بالرمز:

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$B = (b_1, \ldots, b_n)$$

هنالك نوعان من الطرائق:

[1] النوع الذي يعطينا الحل النهائي بشكل دقيق يصعب تطبيق هذه الطريقة كلما كان عدد المعادلات كبيراً

[2] النوع التقريبي: هو النوع الذي نحصل فيه على الحل بشكل تقريبي و سهل التطبيق مهما كان عدد المعادلات كبيراً يمكن استخدامها بشكل أسرع وأسهل عن طريق الحاسبات الآلية والحاسوب.

- قبل البدء بهذه الطرائق لابد من معرفة وجود الحل ووحدانيته.

مبرهنة:

بفرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية (1) عندئذ يوجد حل لهذه الجملة الخطية من المعادلات إذا وفقط إذا كان لمجموعة المعادلات مصفوفة أمثال A متمتها تساوي رتبة $rang\ A = rang\ (A : B)$ بإضافة عمود الثوابت.

ويكون هذا الحل وحيداً إذا كان لمجموعة المعادلات الخطية الناتجة من ① تملك الحل الصفري.

الطرائق المباشرة لحل جملة المعادلات الخطية:

هنالك مجموعة من الطرائق:

[1] المباشرة:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$i = 1, \ldots, n$ و $\Delta = |A|$ محدد مصفوفة

تحليل عددي [م ٧ - نظري ١]

Δ_i: هو Δ بعد تبديل العمود رقم i بعمود الثوابت

2 مقلوب المصفوفة:

$A X = B \Rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B$

$I X = A^{-1} B$

$$\boxed{X = A^{-1} B}$$

لإيجاد حل جملة المعادلات يكفي أن نوجد مقلوب مصفوفة الأمثال مضروباً بعمود الثوابت.

3 غاوس:

لنفرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية (1).

تختصر طريقة غاوس بالشكل الآتي: نجد الحل على مجموعة من المراحل:

في المرحلة الأولى:

يتم حذف أمثال x_1 من جميع المعادلات باستثناء المعادلة الأولى.

وفي الثانية:

يتم حذف أمثال x_2 من جميع المعادلات باستثناء المعادلتين (1)، (2).

وهكذا بالاستمرار نحصل على مجموعة من المعادلات الخطية (1) المكافئة للمجموعة (1) ومثلثية الشكل.

فإذا كانت لدينا مجموعة المعادلات (1) نحصل على مجموعة من المعادلات بعد n من المراحل:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_1 = b_1$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}$$

هذه مجموعة من المعادلات سهلة الحل.

ومن المعادلات الأخيرة نجد x_n.

بالتبديل بالتي سبقتها نحصل على x_{n-1} وهكذا بالتراجع نحصل على حل جملة المعادلات الخطية.

مثال:

بفرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية الآتية:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1$$

أوجد بطريقة غاوس حل مجموعة المعادلات الآتية:

الحل:

تحليل عددي | م7 نظري

في المرحلة الأولى يتم حذف أمثال x_1 من المعادلات الأخيرة وذلك بأن نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونضيفها إلى الثانية ثم نجمع الأولى مع الثالثة ونضرب الأولى بـ -3 ونجمعها مع الرابعة فنحصل على مجموعة المعادلات التالية:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$+4x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5$$

في الخطوة الثانية نحذف أمثال x_2 من المعادلتين الثالثة والرابعة وذلك بضرب الثانية بـ $\frac{2}{3}$ ثم من جديد نضرب الثانية بـ $\frac{4}{3}$ ونضيفها إلى المعادلة الأخيرة:

فنحصل لدينا:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$-x_3 = -1$$

$$x_3 - 2x_4 = -1$$

في الخطوة الأخيرة نجمع المعادلتين 3 و 4 فنحصل على جملة المعادلات:

الخطية المكافئة مثلثية الشكل التالية :

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3$$

$$-x_3 = -1$$

$$-2x_4 = -2$$

$x_2 = 1$ $\qquad$ $x_4 = 1$

$\Rightarrow$

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 1$

وهو حل المعادلات الخطية المفروضة.

ملاحظة :

يجب الانتباه في ترتيب المعادلات وعدم الاختصار لأنه قد يطلب إيجاد محدد ما بهذه الطريقة.

محدد المصفوفة A :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-3)(-1)(-2) = -6$$

مثال :

أوجد بطريقة غاوس حل مجموعة المعادلات التالية ثم استنتج قيمة محدد الأمثال.

تحليل عددي م7 تشرين

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -7$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1$$

ثم استنتج قيمة المحدد.

4 تحليل إلى عوامل U و L:

تهدف هذه الطريقة إلى تحليل مصفوفة الأمثال A في المجموعة الخطية:

$$AX = B$$

إلى جداء مصفوفتين مثلثيتين بالشكل:

الأولى L: مصفوفة مثلثية سفلى.

والثانية U: مصفوفة مثلثية عليا.

بعد التحليل نوجد الحل على مرحلتين:

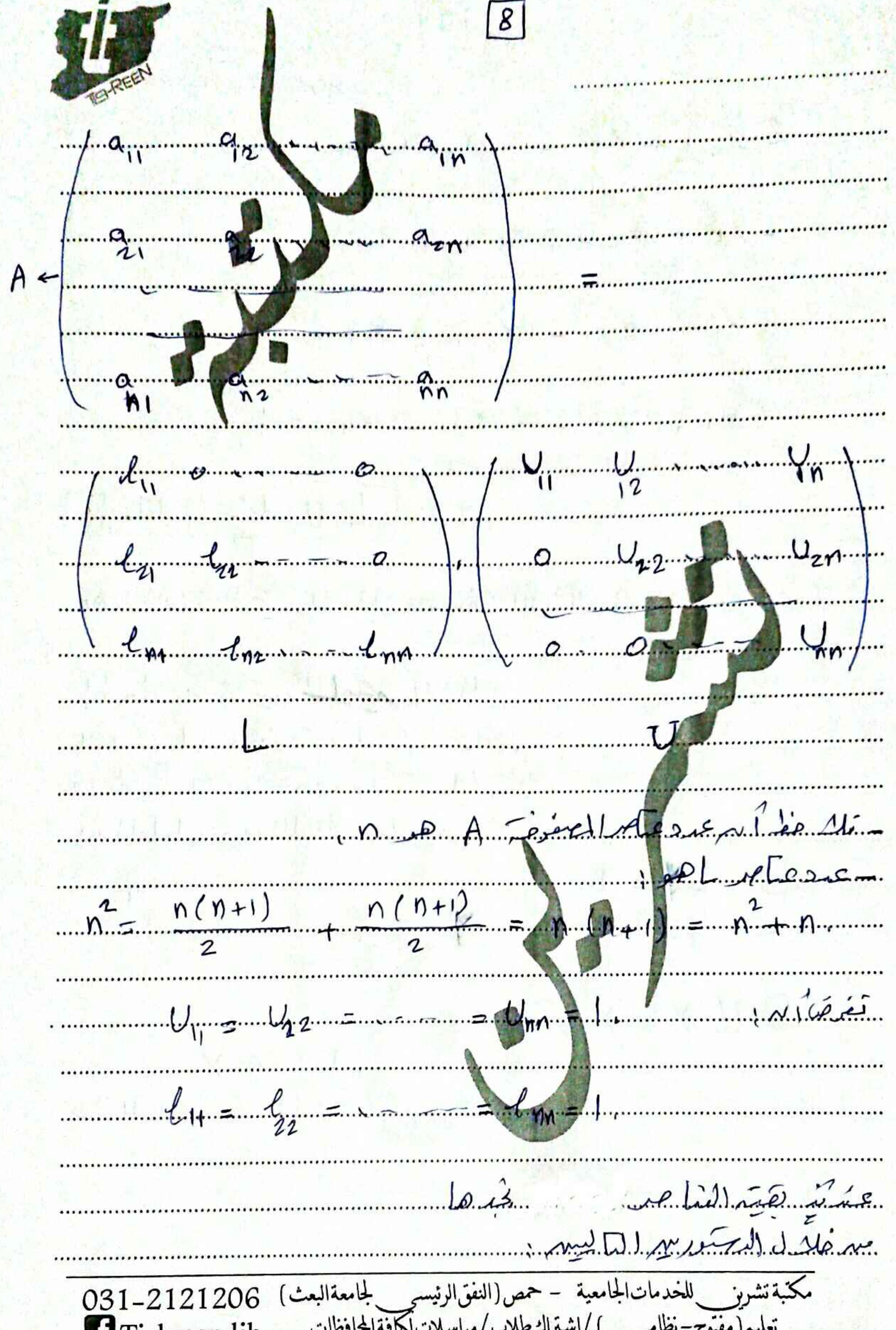
① $LY = B$

متجه مساعد $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$

② $UX = Y$

X هو الحل.

مثال المصفوفة الآتية:



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \cdots & U_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & U_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

نلاحظ أن عدد عناصر المصفوفة A هو n ,

عدد عناصر L هو :

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n.$$

نفرض أن :

$$U_{11} = U_{22} = \cdots = U_{nn} = 1.$$

$$l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1.$$

عندئذٍ بقية العناصر نجدها

من خلال الدستورين التاليين :

تحليل عددي ع ٢ ج نظري

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad ; \quad i \geq j$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right) / l_{ii} \quad ; \quad i < j$$

يتم تطبيق هذين الدستورين عندما $j = 1 \Leftarrow l_{i1} = a_{i1}$

$i = 1 \Rightarrow u_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}}$

مبدأ الدستور:
نوجد عناصر العمود الأول من المصفوفة L ثم نحسب السطر الأول من U فنعود إلى المصفوفة L ونحسب العمود الثاني وهكذا ثم ننتقل لحساب السطر 2 من U وهكذا.

مثال:

أوجد بطريقة تحليل إلى عوامل جملة حلول المعادلات الخطية التالية:

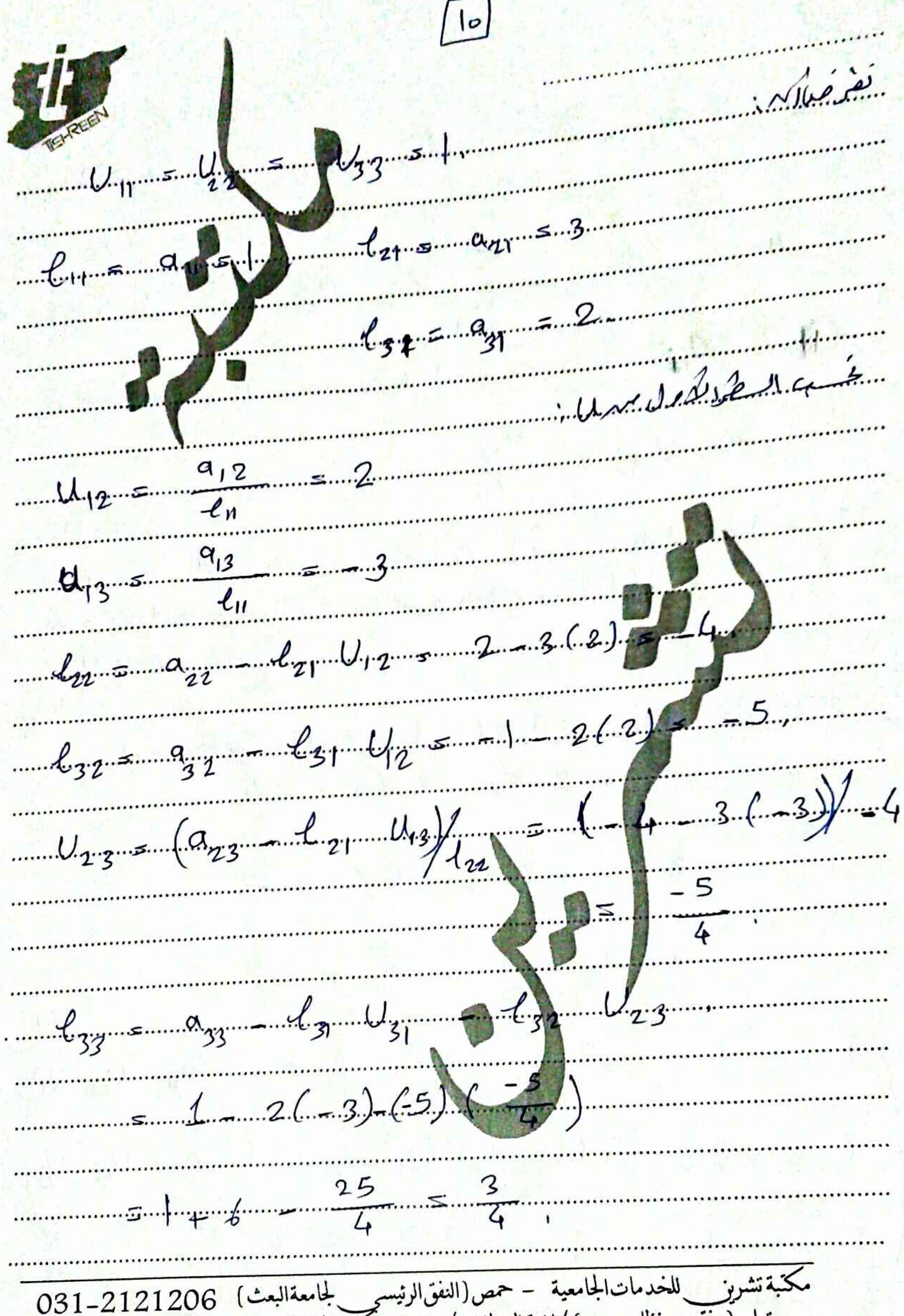
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3$$

$$+2x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

الحل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$



نفرض جدلاً:

$U_{11} = U_{22} = U_{33} = 1$,

$l_{11} = a_{11} = 1$ $\quad l_{21} = a_{21} = 3$

$l_{31} = a_{31} = 2$

نحسب السطر الأول من U:

$U_{12} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}} = 2$

$U_{13} = \dfrac{a_{13}}{l_{11}} = -3$

$l_{22} = a_{22} - l_{21} U_{12} = 2 - 3(2) = -4$

$l_{32} = a_{32} - l_{31} U_{12} = -1 - 2(2) = -5$,

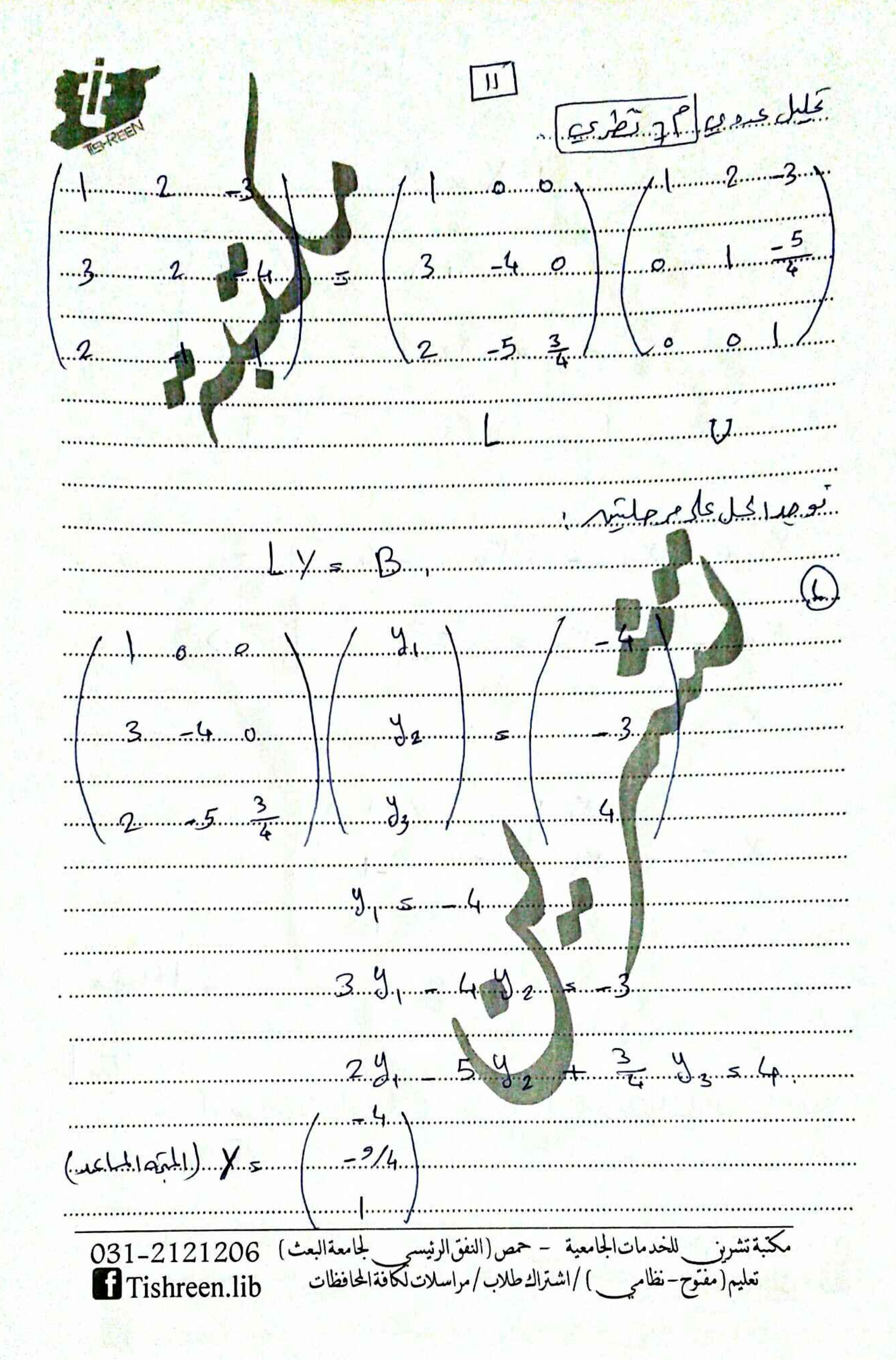
$U_{23} = (a_{23} - l_{21} U_{13}) / l_{22} = (-4 - 3(-3)) / -4$

$= \dfrac{-5}{4}$

$l_{33} = a_{33} - l_{31} U_{31} - l_{32} U_{23}$

$= 1 - 2(-3) - (-5)\left(\dfrac{-5}{4}\right)$

$= 1 + 6 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{3}{4}$



تحليل عمودي م.ج قطري

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L U

نوجد الحل على مرحلتين :

$LY = B$, (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$y_1 = -4$

$3y_1 - 4y_2 = -3$

$2y_1 - 5y_2 + \frac{3}{4}y_3 = 4$

$$Y = \begin{pmatrix} -4 \\ -9/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (المتجه المساعد)

(2)

$$UX = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = -4$$

$$X_2 - \frac{5}{4}X_3 = -\frac{9}{4}$$

$$X_3 = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وهو الحل.

مثال :

أوجد بطريقة التحليل إلى عوامل حل مجموعة المعادلات الخطية التالية :

تحليل عددي 2 تمرين 7

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$$

مثال :

أوجد بطريقة التحليل إلى عوامل حل مجموعة المعادلات و أيضاً بطريقة غاوص.

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

الطرائق التقريبية لحل جملة المعادلات :

تدعى هذه الطرائق بالطرائق التكرارية تستخدم عندما عدد المعادلات كبيراً.

1 طريقة التقريبات المتتالية البسيطة :

لتوضيح هذه الطريقة سنأخذ ثلاث معادلات خطية لذلك نفرض لدينا : مجموعة المعادلات :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

نعزل x_1 من المعادلة الأولى و x_2 من الثانية وهكذا إلى المعادلة رقم 3

نحسب x_i :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 \right],$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1 - a_{23} x_3 \right],$$

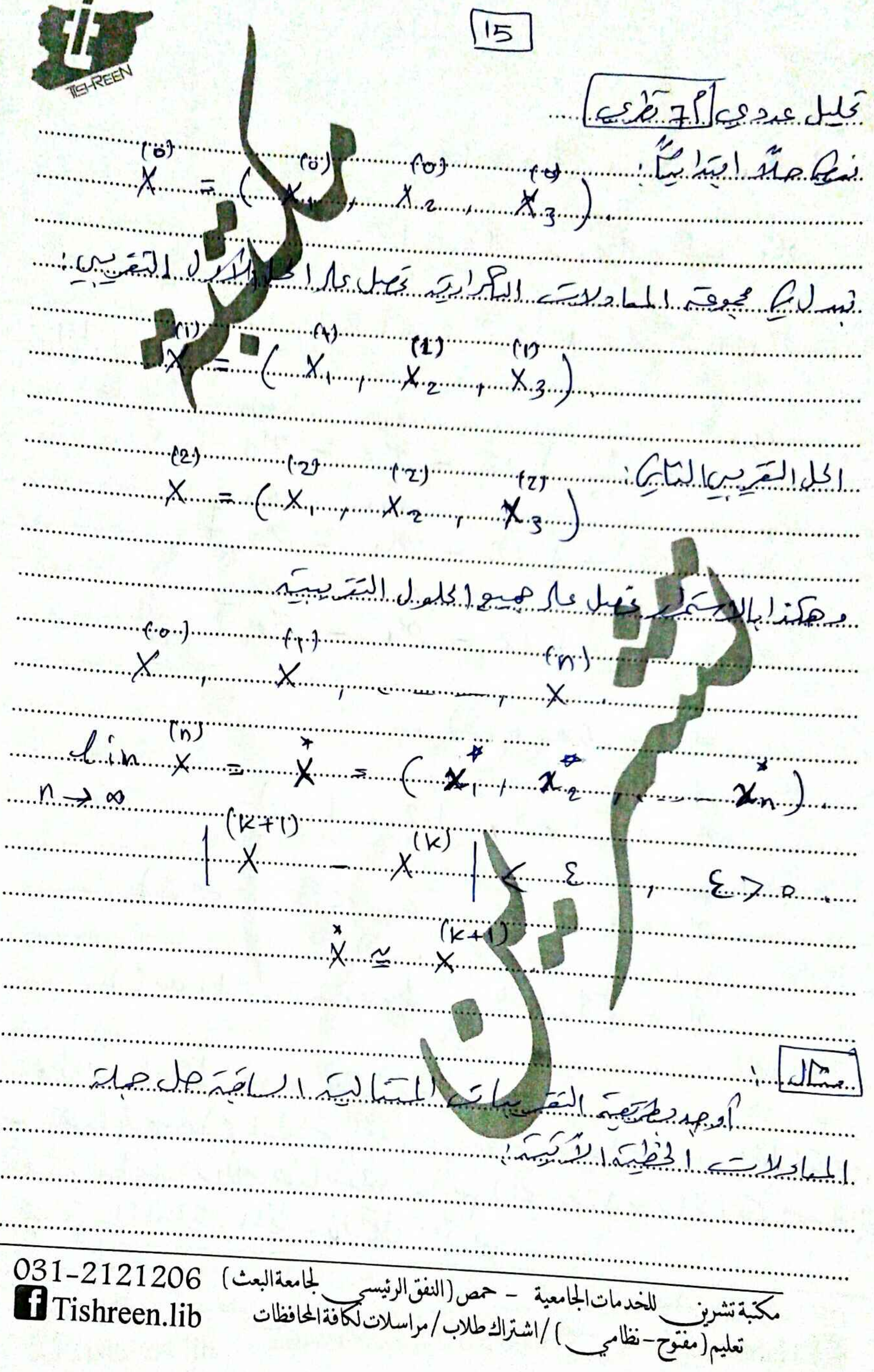
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31} x_2 - a_{33} x_2 \right],$$

وهي تشبه طريقة التقريبات من أجل معادلة غير خطية، المعادلات التكرارية:

$$X_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right].$$

$$X_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - a_{21} x_1^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right].$$

$$X_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - a_{31} x_1^{(k)} - a_{32} x_2^{(k)} \right].$$



تحليل عددي | م 7 نظري |

نبدأ بحل ابتدائي:

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$$

نبدله في مجموعة المعادلات التكرارية نحصل على الحل الأول التقريبي:

$$X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$$

الحل التقريبي الثاني:

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$$

وهكذا بالاستمرار نحصل على جميع الحلول التقريبية

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$$

$$\lim_{n \to \infty} X^{(n)} = X^{*} = (x_1^{*}, x_2^{*}, \ldots, x_n^{*})$$

$$|X^{(k+1)} - X^{(k)}| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$X^{*} \simeq X^{(k+1)}$$

مثال:

أوجد بطريقة التقريبات المتتالية الساخنة حل جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + 10x_2 + x_3 = 12$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 12,$$

الحل:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right],$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left[12 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right]$$

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

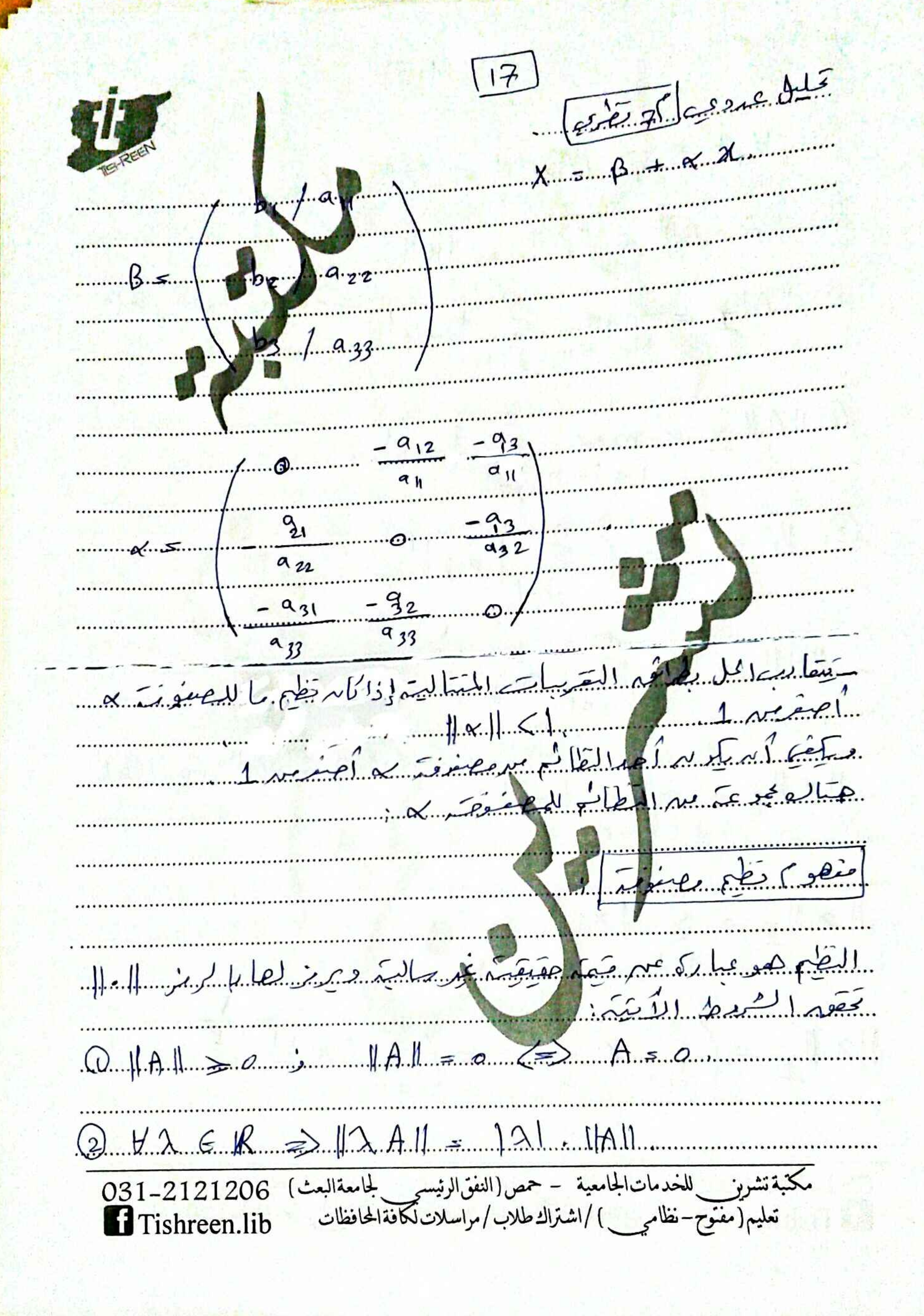
$$x^{(1)} = (1.2, 1.2, 1.2)$$

$$x^{(2)} = (0.96, 0.96, 0.96).$$

$$x^{(3)} = (1.008, 1.008, 1.008).$$

وذلك باستمرار نوجد بقية الحلول حسب ع.

- هنا باستخدام الطرائق التقريبية قد يتقارب الحل من الحل القريب وقد يتباعد والأمر هنا يتعلق بتنظيم المصفوفة (A) الناتجة من تحويل مجموعة المعادلات الخطية للشكل الآتي:



تحليل عددي | أ.م تشريني

$$X = \beta + \alpha x$$

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 / a_{11} \\ b_2 / a_{22} \\ b_3 / a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{pmatrix}$$

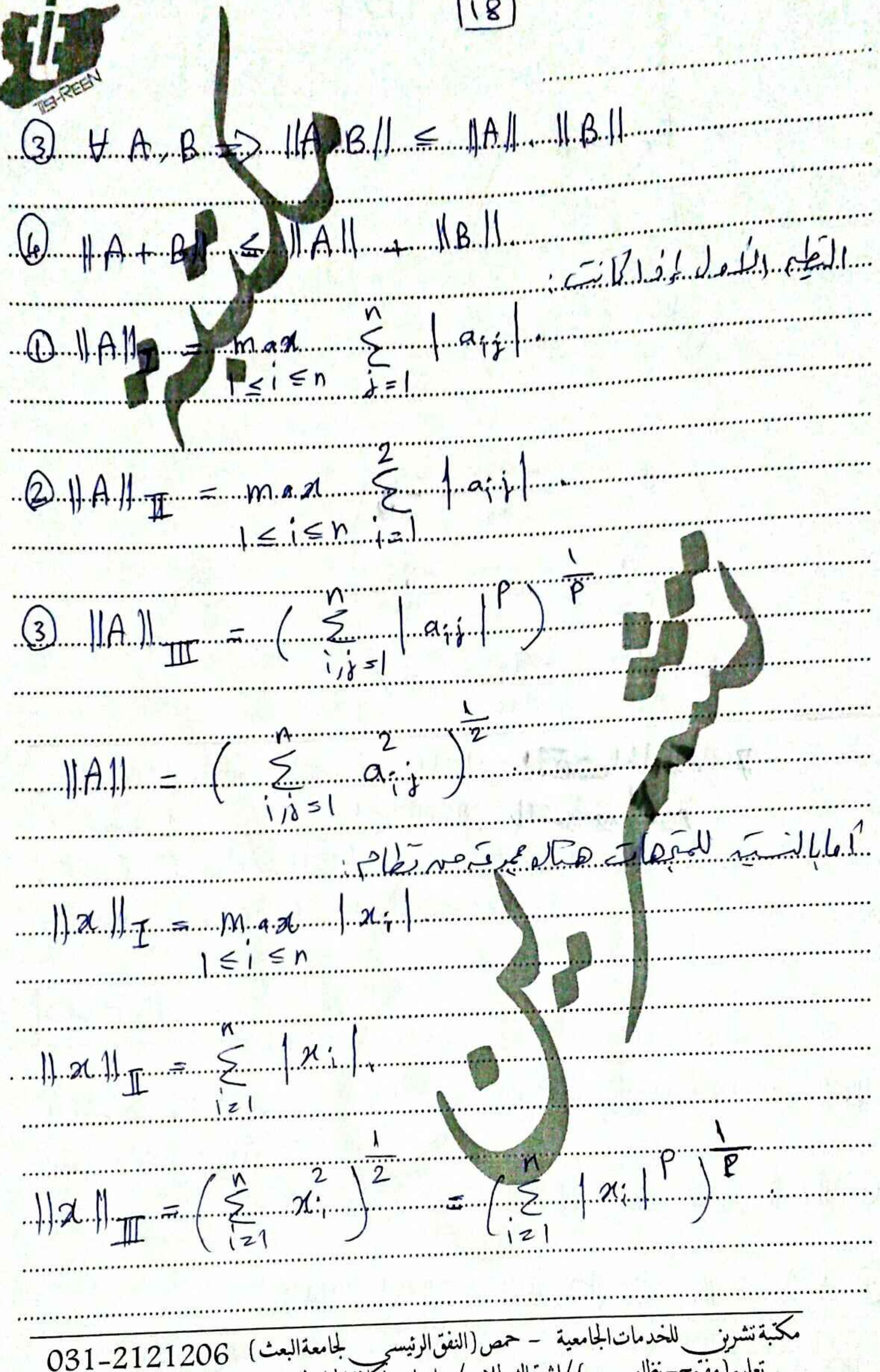
- يتقارب الحل بطريقة التقريبات المتتالية إذا كان نظيم ما للمصفوفة α أصغر من 1 : $\|\alpha\| < 1$
- ويكفي أن يكون أحد النظائم من مصفوفة α أصغر من 1
هناك مجموعة من النظائم للمصفوفة α :

مفهوم نظيم مصفوفة :

النظيم هو عبارة عن قيمة حقيقية غير سالبة ويرمز لها بالرمز $\|\cdot\|$ تحقق الشروط الآتية:

① $\|A\| \ge 0$ و $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

② $\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$



③ $\forall A, B \Rightarrow \|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

④ $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

النظيم الأصل لمصفوفات:

① $\|A\|_{I} = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

② $\|A\|_{II} = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{i=1}^{2} |a_{ij}|$.

③ $\|A\|_{III} = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$

$\|A\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{2} \right)^{\frac{1}{2}}$

أما بالنسبة للمتجهات هناك مجموعة من نظام:

$\|x\|_{I} = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

$\|x\|_{II} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

$\|x\|_{III} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$

مثال:

أوجد النظيم الأول والثاني والثالث للمصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_{I} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max(7, 10, 7, 10) = 10$$

$$\|A\|_{II} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max(6, 7, 10, 11) = 11$$

$$\|A\|_{III} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{90} \cong 9$$

لكي يتقارب الحل يكفي أن يكون أحد نظائم $\alpha < 1$.

انتهت المحاضرة 7.

بالتوفيق للجميع